## ISTITUZIONI DI GEOMETRIA 2016/17

## COMPITO 11 GIUGNO 2017

**Esercizio 1** (5 punti)**.** Mostra che il fibrato tangente $TM$ di una varietà $M$ è sempre una varietà orientabile, anche se $M$ non lo è.

**Esercizio 2** (10 punti)**.** Siano $r, s \subset \mathbb{R}^3$ due rette affini incidenti e distinte. Determina tutti i gruppi di coomologia di De Rham della varietà $\mathbb{R}^3 \setminus (r \cup s)$.

**Esercizio 3** (20 punti)**.** Considera il sottogruppo $G < \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ formato da tutte le matrici intere $2 \times 2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

A ciascuna matrice di questo tipo associamo la trasformazione di Möbius

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

Mostra che in questo modo abbiamo definito una azione di $G$ sul semipiano superiore $H^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$.

(1) Mostra che l'azione di $G$ su $H^2$ è propriamente discontinua.

(2) L'azione di $G$ è libera?

(3) Per ogni intero $p \geq 2$, sia $G_p < G$ il sottogruppo formato dalle matrici congruenti all'identità modulo $p$, cioè tali che

$$a \equiv 1, \quad b \equiv 0, \quad c \equiv 0, \quad d \equiv 1 \mod p.$$

Mostra che se $p \geq 3$ allora l'azione di $G_p$ su $H^2$ è libera e propriamente discontinua.

(4) Mostra che gli elementi di $G$ sono isometrie rispetto alla metrica iperbolica su $H^2$, data da $g = \frac{1}{y^2} g^E$.

(5) Mostra che se $p \geq 3$ lo spazio topologico $S = H^2/_{G_p}$ ha una naturale struttura di varietà riemanniana per cui la proiezione $H^2 \to H^2/_{G_p}$ sia un rivestimento e una isometria locale.

(6) Mostra che $S$ è completa.

(7) Mostra che $S$ ha area finita.